Zahl

Seit dem Ende des 19. Jahrhunderts werden in der Mathematik Zahlen rein mittels der Logik unabhängig von Vorstellungen von Raum und Zeit definiert. Grundsteine wurden hier von Richard Dedekind und Giuseppe Peano mit der Axiomatisierung der natürlichen Zahlen (s. Peano-Axiome) gelegt. Dedekind schreibt zu diesem neuen Ansatz:

„Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Theiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen noch keineswegs als erfüllt anzusehen. […] die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen.“ (Richard Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? Vorwort zur ersten Auflage., Wikipedia)

Die **natürlichen Zahlen** bilden diejenige Menge von Zahlen, die zum Zählen verwendet wird (0, 1, 2, 3, 4, 5, …). Je nach Definition wird die Null mit eingeschlossen oder nicht. Die natürlichen Zahlen sind mit einer Ordnung („kleiner“) versehen. Es gibt ein kleinstes Element (je nach Definition die Null oder die Eins) und jedes Element hat einen Nachfolger und ist kleiner als sein Nachfolger. Indem man ausgehend vom kleinsten Element immer wieder den Nachfolger bildet, erreicht man schließlich alle natürlichen Zahlen.

Die Ordnung über den natürlichen Zahlen wird auf die **ganzen Zahlen** erweitert, hierbei gibt es kein kleinstes Element mehr, dafür hat jedes Element einen Vorgänger und einen Nachfolger (der Vorgänger der 0 ist die -1, der der -1 die -2 etc.). … welche als additives Inverses bezeichnet wird. Die obige Zahl , genannt Differenz, ist dann als , kurz , gegeben. Hierdurch ist die Subtraktion auf den ganzen Zahlen definiert, welche jedoch im Wesentlichen eine Kurzschreibweise darstellt.

Ebenso wie die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen erweitert werden, um ein additives Inverses und die Subtraktion zu erhalten, erweitert man die ganzen Zahlen zu den **rationalen Zahlen**, um ein multiplikatives Inverses und die Division zu erhalten. D. h. die rationalen Zahlen enthalten die ganzen Zahlen und zu jeder ganzen Zahl $z \neq 0$ fügt man die genannte Zahl $1/z$ (Stammbruch) als multiplikatives Inverses hinzu, so dass $Z * 1/z = 1$. diese Identifizierung wird auch als Kürzen und Erweitern bezeichnet. Somit erhält man eine mit der Multiplikation ganzer Zahlen kompatible Multiplikation und Division. Mittels der Dezimalbruchdarstellung lässt sich eine mit der Ordnung der ganzen Zahlen kompatible Ordnung definieren, die auch die Verträglichkeit mit Addition und Multiplikation erhält.

Betrachtet man Probleme wie etwa das Finden von Nullstellen von Polynomfunktionen über den rationalen Zahlen, stellt man fest, dass sich in den rationalen Zahlen beliebig gute Näherungen konstruieren lassen: Etwa findet sich bei zahlreichen Polynomfunktionen zu jeder festgelegten Toleranz eine rationale Zahl, sodass der Wert der Polynomfunktion an dieser Stelle höchstens um die Toleranz von der Null abweicht. Zudem kann man die Näherungslösungen so wählen, dass sie „nah beieinander“ liegen, denn Polynomfunktionen sind stetig („weisen keine ‚Sprünge‘ auf“). Dieses Verhalten tritt nicht nur bei Nullstellen von Polynomfunktionen auf, sondern auch bei zahlreichen weiteren mathematischen Problemen, die eine gewisse Stetigkeit aufweisen, sodass man dazu übergeht, die Existenz einer Lösung zu garantieren, sobald beliebig gute Näherungen durch nahe beieinander gelegene rationale Zahlen existieren. Eine solche Lösung nennt man dann eine **reelle Zahl.** Alternativ lassen sich die reellen Zahlen explizit als Folgen von rationalen Zahlen, die sich einander „annähern", definieren. Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar. Daher ist es nicht möglich, jede beliebige reelle Zahl sprachlich eindeutig zu beschreiben. Die Abgeschlossenheit der reellen Zahlen unter solchen **Näherungsprozessen** bezeichnet man als Vollständigkeit. Diese erlaubt es, zahlreiche Begriffe aus der Analysis, wie den der Ableitung und den des Integrals, über Grenzwerte zu definieren. Grenzwerte erlauben zudem die Definition zahlreicher wichtiger Funktionen, etwa der trigonometrischen Funktionen (Sinus, Cosinus, Tangens etc.), was über den rationalen Zahlen nicht möglich ist. [Die Zahl π ist eine irrationale Zahl, also eine reelle, aber keine rationale Zahl. Das bedeutet, dass sie nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen , also als Bruch dargestellt werden kann.]

Manche Polynomfunktionen besitzen keine Nullstellen in den reellen Zahlen. Beispielsweise nimmt die Funktion $x \to x^2 + 1$ für jede reelle Zahl x einen Wert größer als Null an. Es lässt sich zeigen, dass durch das Hinzufügen einer Zahl **i, genannt imaginäre Einheit**, die die Gleichung $i^2 + 1 = 0$ erfüllt, wobei die grundlegenden Eigenschaften der Addition und Multiplikation erhalten bleiben sollen, bereits die reellen Zahlen zu den **komplexen Zahlen** erweitert werden, in denen alle nicht konstanten Polynomfunktionen eine Nullstelle besitzen. Die komplexen Zahlen bilden damit den algebraischen Abschluss der reellen Zahlen. Grenzwertprozesse sind in den komplexen Zahlen ebenso möglich wie in den reellen Zahlen, jedoch sind die komplexen Zahlen nicht mehr geordnet. Sie lassen sich als Ebene (zweidimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen) auffassen. Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in der Form a + b * i „darstellen". wobei a und b reelle Zahlen sind und i die imaginäre Einheit bezeichnen.

Zahlentheorie

Elementare oder arithmetische Zahlentheorie

Von der Antike bis in das siebzehnte Jahrhundert behauptete sich die Zahlentheorie als grundständige Disziplin und kam ohne andere mathematische Teilgebiete aus. Ihre einzigen Hilfsmittel waren die Eigenschaften der ganzen Zahlen, insbesondere Primfaktorzerlegung (Fundamentalsatz der Arithmetik), Teilbarkeit und das Rechnen mit Kongruenzen. Eine solche reine Herangehensweise wird auch als elementare Zahlentheorie bezeichnet. Wichtige Resultate, die sich mit Hilfe elementarer Methoden erzielen lassen, sind der kleine Satz von Fermat und dessen Verallgemeinerung, der Satz von Euler, der Chinesische Restsatz, der Satz von Wilson und der Euklidische Algorithmus.

Auch heute noch wird in einzelnen Fragen zu Teilbarkeit, Kongruenzen und Ähnlichem mit elementaren zahlentheoretischen Methoden geforscht. Ebenso wird versucht, Beweise zur Zahlentheorie, die sich weitergehender Methoden bedienen, in elementare Begriffe zu „übersetzen", woraus sich neue Erkenntnisse ergeben können. Ein Beispiel ist die elementare Betrachtung zahlentheoretischer Funktionen wie der Möbiusfunktion und der Eulerschen Phi-Funktion.

Analytische Zahlentheorie

Als erster wurde Euler darauf aufmerksam, dass man Methoden der Analysis und Funktionentheorie benutzen kann, um zahlentheoretische Fragestellungen zu lösen. Eine solche Herangehensweise bezeichnet man als analytische Zahlentheorie. Wichtige Probleme, die mit analytischen Methoden gelöst wurden, betreffen meist statistische Fragen nach der Verteilung von Primzahlen und der Asymptotik. Dazu gehören zum Beispiel der von Gauß vermutete, aber erst Ende des 19. Jahrhunderts bewiesene Primzahlsatz und der dirichletsche Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Daneben dienen analytische Methoden auch dazu, die Transzendenz von Zahlen wie der **Kreiszahl π** oder der **Eulerschen Zahl e** nachzuweisen. Im Zusammenhang mit dem Primzahlsatz wurde erstmals die Riemannsche Zeta-Funktion untersucht, die heute zusammen mit ihren Verallgemeinerungen (allgemeine Zeta-Funktionen) Gegenstand sowohl analytischer als auch algebraischer Forschung und Ausgangspunkt der Riemannschen Vermutung ist.

Algorithmische Zahlentheorie

Die algorithmische Zahlentheorie ist ein Zweig der Zahlentheorie, der mit dem Aufkommen von Computern auf breites Interesse stieß. Dieser Zweig der Zahlentheorie beschäftigt sich damit, wie zahlentheoretische Probleme algorithmisch effizient umgesetzt werden können. Wichtige Fragestellungen sind, ob eine große Zahl prim ist, die Faktorisierung großer Zahlen und die eng damit verbundene Frage nach einer effizienten Berechnung des diskreten Logarithmus. Außerdem gibt es inzwischen Algorithmen zur Berechnung von Klassenzahlen, Kohomologiegruppen und zur K-Theorie algebraischer Zahlkörper. - Anwendungen der Zahlentheorie finden sich in der Kryptographie, insbesondere bei der Frage nach der Sicherheit der Datenübertragung im Internet. Hierbei finden sowohl elementare Methoden der Zahlentheorie (Primfaktorzerlegung, etwa bei RSA oder Elgamal) als auch fortgeschrittene Methoden der algebraischen Zahlentheorie, wie etwa die Verschlüsselung über elliptische Kurven (ECC) breite Anwendung.

Zahlentheorie in der Antike und im Mittelalter

Die ersten schriftlichen Nachweise der Zahlentheorie reichen bis ca. 2000 v. Chr. zurück. Die Babylonier und Ägypter kannten in dieser Zeit bereits die Zahlen kleiner als eine Million, die Quadratzahlen, sowie einige pythagoreische Tripel.

Die systematische Entwicklung der Zahlentheorie begann jedoch erst im ersten Jahrtausend v. Chr. im antiken Griechenland. Herausragendster Vertreter ist Euklid (ca. 300 v. Chr.), der die von Pythagoras erfundene Methode des mathematischen Beweises in die Zahlentheorie einführte. Sein berühmtestes Werk, Euklids Elemente, wurde bis in das achtzehnte Jahrhundert als Standardlehrbuch für Geometrie und Zahlentheorie verwendet. Die Bände 7, 8 und 9 beschäftigen sich dabei mit zahlentheoretischen Fragestellungen, unter anderem der Definition der Primzahl, einem Verfahren zur Berechnung des größten gemeinsamen

Teilers (Euklidischer Algorithmus) und dem Beweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen (Satz von Euklid).

Im Jahre 250 v. Chr. beschäftigte sich als Erster der griechische Mathematiker Diophant von Alexandrien mit den nach ihm benannten Gleichungen, die er mit linearen Substitutionen auf bekannte Fälle zu reduzieren versuchte. Damit konnte er tatsächlich einige einfache Gleichungen lösen. Diophants Hauptwerk ist die Arithmetica. Die Griechen warfen viele wichtige arithmetische Fragestellungen auf, die zum Teil bis heute ungelöst sind (wie z. B. das Problem der Primzahlzwillinge und das der vollkommenen Zahlen) oder deren Lösung viele Jahrtausende in Anspruch nahm und die exemplarisch für die Entwicklung der Zahlentheorie stehen.

Mit dem Untergang der griechischen Staaten erlosch auch die Blütezeit der Zahlentheorie in Europa. Aus dieser Zeit ist nur der Name des Leonardo di Pisa (ca. 1200 n. Chr.) (Fibonacci) nennenswert, der sich neben Zahlenfolgen und der Auflösung von Gleichungen durch Radikale auch mit diophantischen Gleichungen befasste. Am Ende des Mittelalters trat Marin Mersenne in Erscheinung, nach dem die Mersenne-Zahlen benannt wurden.

Zahlentheorie in der frühen Neuzeit

Der erste wichtige Vertreter der Zahlentheorie der Neuzeit war Pierre de Fermat (1607–1665). Er bewies den kleinen Satz von Fermat, untersuchte die Darstellbarkeit einer Zahl als Summe zweier Quadrate und erfand die Methode des unendlichen Abstiegs, mit der er den von ihm aufgestellten großen Satz von Fermat im Fall lösen konnte. Der Versuch einer allgemeinen Lösung des großen Satzes inspirierte die Methoden der Zahlentheorie über die nächsten Jahrhunderte bis in die Moderne. Das achtzehnte Jahrhundert der Zahlentheorie wird vor allem von drei Mathematikern beherrscht: Leonhard Euler (1707–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) und Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

Philosophie der Mathematik

Systematisch grundlegend sind dabei Fragen nach

- der Seinsweise der mathematischen Objekte: Existieren diese „wirklich“ und unabhängig von einer konkreten Verwendung, und wenn ja in welchem Sinne? Was heißt es überhaupt, sich auf ein mathematisches Objekt zu beziehen? Welchen Charakter haben mathematische Sätze? Welche Beziehungen bestehen zwischen Logik und Mathematik? – Es handelt sich hierbei um ontologische Fragen.
- dem Ursprung des mathematischen Wissens: Was ist Quelle und Wesen der mathematischen Wahrheit? Welches sind die Bedingungen der mathematischen Wissenschaft? Welches sind grundsätzlich ihre Forschungsmethoden? Welche Rolle spielt dabei die Natur des Menschen? – Dies sind epistemologische Fragen.

- dem Verhältnis von Mathematik und Realität: Welche Beziehung besteht zwischen der abstrakten Welt der Mathematik und dem materiellen Universum? Ist Mathematik in der Erfahrung verankert, und wenn ja, wie? Wie kommt es, dass Mathematik „auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt“ (Albert Einstein)? In welcher Weise erlangen Konzepte wie Zahl, Punkt, Unendlichkeit ihre über den innermathematischen Bereich hinaus reichende Bedeutung?

Ausgangspunkt ist fast durchgehend die Auffassung, dass mathematische Sätze apodiktisch gewiss, zeitlos und exakt sind und ihre Richtigkeit weder von empirischen Ergebnissen noch von persönlichen Ansichten abhängt. Aufgabe ist es, die Bedingungen der Möglichkeit solcher Erkenntnis zu ermitteln, wie auch diesen Ausgangspunkt zu hinterfragen.

Realismus, Platonismus

Eine unter Mathematikern verbreitete Position ist der Realismus, vertreten u.a. durch Kurt Gödel und Paul Erdős. Mathematische Gegenstände (Zahlen, geometrische Figuren, Strukturen) und Gesetze sind keine Konzepte, die im Kopf des Mathematikers entstehen, sondern es wird ihnen eine vom menschlichen Denken unabhängige Existenz zugesprochen. Mathematik wird folglich nicht erfunden, sondern entdeckt. Durch diese Auffassung wird dem objektiven, also interpersonellen Charakter der Mathematik entsprochen. Dieser ontologische Realismus ist unvereinbar mit allen Spielarten der materialistischen Philosophie.

Die klassische Form des Realismus ist der Platonismus, demzufolge die mathematischen Gegenstände und Sätze losgelöst von der materiellen Welt und unabhängig von Raum und Zeit existieren, zusammen mit den anderen Ideen wie dem „Guten“, dem „Schönen“, oder dem „Göttlichen“. Das Hauptproblem des Platonismus in der Philosophie der Mathematik ist die Frage, auf welche Weise wir als begrenzte Wesen die mathematischen Objekte und Wahrheiten erkennen können, wenn sie in diesem „Ideenhimmel“ beheimatet sind. Laut Gödel leistet dies eine mathematische Intuition, die, ähnlich einem Sinnesorgan, uns Menschen Teile dieser anderen Welt wahrnehmen lässt. Derartige rationale Intuitionen werden auch von den meisten Klassikern des Rationalismus und in jüngeren Debatten um Rechtfertigung oder Wissen a priori u.a. von Laurence Bonjour verteidigt. - Aristoteles behandelt seine Philosophie der Mathematik in den Büchern XIII und XIV der Metaphysik. Er kritisiert hier und vielerorts den Platonismus.

Logizismus

Der Logizismus, wurde unter anderem von Gottlob Frege, Bertrand Russell und Rudolf Carnap begründet. Nach dieser These lässt sich die Mathematik vollständig auf die formale Logik zurückführen und ist folglich auch als ein Teil der Logik zu verstehen. Logizisten vertreten die Ansicht, dass mathematische Erkenntnis a priori gültig ist. Mathematische Konzepte sind abgeleitet von logischen Konzepten, mathematische Sätze folgen direkt aus den Axiomen der reinen Logik.

Gottlob Frege, der als einer der großen Denker des 20. Jahrhunderts gilt, führte in seinen Grundgesetzen der Arithmetik das Gesetzesgebäude des Zahlenrechnens auf logische Prinzipien zurück. Freges Konstruktion erwies sich aber noch vor seiner vollständigen Veröffentlichung als brüchig, nachdem Russell mit seiner berühmten Antinomie zeigte, dass Zirkelschlüsse und Widersprüche seinem auf formale Logik gegründeten mathematischen Gebäude das Fundament nahmen. Russell teilte dies Frege in einem Brief mit, worauf dieser in eine tiefe persönliche Krise geriet. Später konnten mit komplizierteren Axiomensystemen die Widersprüche vermieden werden, so dass die Mengenlehre und insbesondere die Theorie der Natürlichen Zahlen widerspruchslos begründet werden konnten.

Kritisiert wird am Logizismus vor allem, dass er die Grundprobleme der Mathematik nicht löst, sondern lediglich auf Grundlagenprobleme der Logik schiebt und somit keine befriedigenden Antworten gibt.

Formalismus, Deduktivismus

Der F**ormalismus** versteht die Mathematik ähnlich einem Spiel, das auf einem gewissen Regelwerk beruht, mit dem Zeichenketten (engl. strings) manipuliert werden. Zum Beispiel wird in dem Spiel „Euklidische Geometrie“ der Satz des Pythagoras gewonnen, indem gewisse Zeichenfolgen (die Axiome) mit gewissen Regeln (denen des logischen Schlussfolgerns) wie Bausteine zusammengefügt werden. Mathematische Aussagen verlieren damit den Charakter von Wahrheiten (etwa über geometrische Figuren oder Zahlen), sie sind letztlich gar keine Aussagen mehr „über irgendetwas“.

Als **Deduktivismus** wird oft eine Variante des Formalismus bezeichnet, in der z. B. der Satz des Pythagoras keine absolute Wahrheit mehr darstellt, sondern nur eine relative: Wenn man den Zeichenfolgen in einer Weise Bedeutungen zuweist, so dass die Axiome und die Schlussregeln wahr sind, dann muss man die Folgerungen, z. B. den Satz des Pythagoras, als wahr ansehen. So gesehen muss der Formalismus kein bedeutungsloses symbolisches Spiel bleiben. Der Mathematiker darf vielmehr hoffen, dass es eine Interpretation der Zeichenfolgen gibt, die ihm z. B. die Physik oder andere Naturwissenschaften vorgeben, so dass die Regeln zu wahren Aussagen führen. Ein deduktivistischer Mathematiker kann sich also sowohl von der Verantwortung für die Interpretationen als auch von den ontologischen Schwierigkeiten der Philosophen freihalten.

David Hilbert gilt als bedeutender früher Vertreter des Formalismus. Er strebt einen konsistenten axiomatischen Aufbau der gesamten Mathematik an, wobei er wiederum die natürlichen Zahlen als Ausgangspunkt wählt, in der Annahme, damit ein vollständiges und widerspruchsloses System zu besitzen. Dieser Auffassung hat kurze Zeit später Kurt Gödel mit seinem Unvollständigkeitssatz den Boden entzogen. Damit war für jedes Axiomensystem, das die natürlichen Zahlen umfasst, bewiesen, dass es entweder unvollständig oder in sich widersprüchlich ist.

Strukturalismus

Der Strukturalismus betrachtet die Mathematik in erster Linie als eine Wissenschaft, die sich mit allgemeinen Strukturen beschäftigt, d.h. mit den Relationen von Elementen innerhalb eines Systems. Um dies zu illustrieren, kann man als Beispiel-„System“ etwa die Verwaltung eines Sportvereins[2] betrachten. Die verschiedenen Ämter (etwa Vorstand, Kassenprüfer, Kassenwart usw.) lassen sich unterscheiden von den Personen, die diese Aufgaben übernehmen. Wenn man nur das Gerüst der Ämter betrachtet (und somit die konkreten Personen, die sie ausfüllen, „weglässt“), dann erhält man die allgemeine Struktur eines Vereins. Der Verein selbst mit den Personen, die die Ämter übernommen haben, exemplifiziert diese Struktur.

Ebenso exemplifiziert jedes System, dessen Elemente einen eindeutigen Nachfolger haben, die Struktur der natürlichen Zahlen: Analoges gilt für andere mathematische Objekte. Da der Strukturalismus Objekte wie Zahlen nicht losgelöst von ihrer Gesamtheit oder Struktur betrachtet, sondern sie mehr als „Plätze in einer Struktur“ sieht, weicht er der Frage nach der Existenz von mathematischen Objekten aus bzw. klärt sie als Kategorienfehler. So ist etwa die Zwei als natürliche Zahl nicht mehr losgelöst von der Struktur der natürlichen Zahlen zu betrachten, sondern ein Bezeichner für den „zweiten Platz in der Struktur der natürlichen Zahlen“: weder hat sie interne Eigenschaften noch eine eigene Struktur. Dementsprechend gibt es sowohl Varianten des Strukturalismus, die mathematische Objekte als existent annehmen, als auch solche, die ihre Existenz ablehnen.

Probleme ergeben sich bei dieser Strömung insbesondere aus der Frage nach den Eigenschaften und dem Sein der Strukturen. Ähnlich wie im Universalienstreit handelt es sich bei Strukturen offenbar um etwas, das gleichzeitig vielen Systemen zukommen kann. So wird die Struktur einer Fußballmannschaften sicher von Tausenden Mannschaften exemplifiziert. Es stellt sich also die Frage, ob und wie Strukturen existieren, ob sie etwa unabhängig von Systemen existieren. Andere offene Fragen betreffen den Zugang zu Strukturen; wie können wir etwas über Strukturen lernen?

Aktuelle Vertreter des Strukturalismus sind Stewart Shapiro, Michael Resnik und Geoffrey Hellman.

Andere Theorien

Der von **Luitzen Brouwer** begründete Intuitionismus verneint die Nützlichkeit der formalen Logik für die Mathematik. Eine Verallgemeinerung des Intuitionismus ist der Konstruktivismus. Der **Konventionalismus** wurde von Henri Poincaré entwickelt und teilweise von logischen Empiristen (Rudolf Carnap, Alfred Jules Ayer, Carl Hempel) weiterentwickelt.

Ein anderes bedeutendes Thema ist die Rechtfertigung einer mathematischen Theorie. Da die Mathematik (anders als die Naturwissenschaften) nicht experimentell überprüft werden kann, sucht man nach Gründen, eine bestimmte mathematische Theorie für richtig zu halten (siehe auch Erkenntnistheorie). Von der Perspektive des Mathematikers ausgehend und zugleich auf die Erkenntniskritik Immanuel Kants zurückgreifend, ergibt sich die Frage nach der kategorialen Verfassung des Menschen, aus welcher sich die mathematischen Disziplinen ableiten lassen (vgl. Ernst Kleinert). Auch in populärwissenschaftlicher Literatur werden Fragen der Philosophie der Mathematik vorgestellt. So wird u.a. von John D. Barrow und Roger Penrose diskutiert, wieso die Mathematik überhaupt nützlich ist und warum sie so gut auf die Welt passt.

Indische Zahlschrift (arabische Zahlen)

Die indischen Ziffern (in Europa auch als indisch-arabische Ziffern oder umgangssprachlich arabische Ziffern bekannt) sind eine Zahlschrift, in der Zahlen positionell auf der Grundlage eines Dezimalsystems mit neun aus der altindischen Brahmi-Schrift herzuleitenden Zahlzeichen und einem eigenen, oft als Kreis oder Punkt geschriebenen Zeichen für die Null dargestellt werden.

Indien – vom Anfang zur Vollendung

Am Beginn der Entwicklung der indischen Ziffern standen die Brahmi-Ziffern. Unter dem Wort śūnya (Sanskrit, die Leere, das Nichts, das Nichtvorhandensein) wurde die Zahl Null geboren. Die philosophische Grundlage dafür war wahrscheinlich das buddhistische Konzept śūnyatā (Sanskrit, die Leerheit, die illusorische Natur der Phänomene) wie es Nāgārjuna (2. Jh. n. Chr.) in der Lehre von der Leerheit (śūnyatāvāda) beschrieben hat. Als weitere Bezugsquelle kommt die Schreibung des Wertes Null als Leerzeichen durch die Babylonier ab dem 6. Jahrhundert v. Chr. in Betracht. 628 n. Chr. verfasste der indische Astronom und Mathematiker Brahmagupta das Brahmasphutasiddhanta (Der Anfang des Universums). Es ist, wenn man vom Zahlensystem der Maya absieht, der früheste bekannte Text, in dem die Null als vollwertige Zahl behandelt wird. Darüber hinaus stellte Brahmagupta in diesem Werk Regeln für die Arithmetik mit negativen Zahlen und mit der Zahl 0 auf, die schon weitgehend unserem modernen Verständnis entsprechen. Der größte Unterschied bestand darin, dass Brahmagupta auch die Division durch 0 zuließ, während in der modernen Mathematik Quotienten mit dem Divisor 0 nicht definiert sind.

Die weltweite Verbreitung der indischen Ziffern ging nicht direkt mit einer weltweiten Verbreitung des Brahmasphutasiddhanta einher, sondern benötigte einige Zwischenschritte. Zwischen 640 und 644 besetzen die Araber den Irak und Persien. Die ersten überlieferten Hinweise auf indische Zahlzeichen im Westen stammen von dem syrischen nestorianischen Bischof Severus Sebokht im 7. Jahrhundert. Um 825 schreibt der persische Mathematiker, Astronom und Geograph al-Chwārizmī oder Khwarizmi sein Werk über das Rechnen mit indischen Zahlzeichen, das nur in lateinischer Übersetzung bekannt ist (Algoritmi de numero indorum, 12. Jahrhundert). Die Null wird bei den Arabern als ṣifr (aṣ-ṣifr ‚null, nichts' vom Verb ṣafira "leer sein") bezeichnet – eine Lehnübersetzung des Wortes śūnya. Daraus entstand das Wort Ziffer.

Der Italiener Leonardo Fibonacci folgte um 1192 seinem Vater ins arabisch besetzte Algerien und lernte Abū Kāmils Algebra kennen. 1202 vollendete Fibonacci den Liber abaci, in welchem er unter anderem die indischen Ziffern vorstellt und diese in der Tat als »indische Ziffern« und nicht als »arabische Ziffern« bezeichnete.

Geschichte der Mathematik

Nach einer aus der Antike stammenden, aber unter Wissenschaftshistorikern umstrittenen Überlieferung beginnt die Geschichte der Mathematik als Wissenschaft mit Pythagoras von Samos. Ihm wird – allerdings wohl zu Unrecht – der Grundsatz „Alles ist Zahl" zugeschrieben. Er begründete die Schule der Pythagoreer, aus der später Mathematiker wie Hippasos von Metapont und Archytas von Tarent hervorgingen. Im Unterschied zu den Babyloniern und Ägyptern hatten die Griechen ein philosophisches Interesse an der Mathematik. Zu den Erkenntnissen der Pythagoreer zählt die Irrationalität von geometrischen Streckenverhältnissen, die von Hippasos entdeckt worden sein soll. Die früher verbreitete Ansicht, dass die Entdeckung der Irrationalität bei den Pythagoreern eine philosophische „Grundlagenkrise" auslöste, da sie ihre früheren Überzeugungen erschütterte, wird jedoch von der heutigen Forschung verworfen. Die antike Legende, wonach Hippasos Geheimnisverrat beging, indem er seine Entdeckung veröffentlichte, soll aus einem Missverständnis entstanden sein.

In der Platonischen Akademie in Athen stand die Mathematik hoch im Kurs. Platon schätzte sie sehr, da sie dazu diente, wahres Wissen erlangen zu können. Die griechische Mathematik entwickelte sich danach zu einer beweisenden Wissenschaft.

Aristoteles formulierte die Grundlagen der Aussagenlogik. Eudoxos von Knidos schuf mit der Exhaustionsmethode zum ersten Mal eine rudimentäre Form der Infinitesimalrechnung. Wegen des Fehlens von reellen Zahlen und Grenzwerten war diese Methode allerdings recht unhandlich. Archimedes erweiterte diese und berechnete damit unter anderem eine Näherung für die Kreiszahl π.

Euklid fasste in seinem Lehrbuch „Elemente" einen Großteil der damals bekannten Mathematik (Geometrie und Zahlentheorie) zusammen. Unter anderem wird darin bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dieses Werk gilt als Musterbeispiel für mathematisches Beweisen: aus wenigen Vorgaben werden alle Ergebnisse in einer Strenge hergeleitet, die es zuvor nicht gegeben haben soll. Euklids „Elemente" wird auch noch heute nach über 2000 Jahren als Lehrbuch verwendet.

Im Gegensatz zu den Griechen befassten sich die antiken Römer kaum mit Mathematik. Bis zur Spätantike blieb die Mathematik weitgehend eine Domäne der griechischsprachigen Bewohner des Reichs, der Schwerpunkt mathematischer Forschung lag in römischer Zeit auf Sizilien und in Nordafrika, dort vor allem in Alexandria.

In der islamischen Welt bildete für die Mathematik die Hauptstadt Bagdad das Zentrum der Wissenschaft. Die muslimischen Mathematiker übernahmen die indische Positionsarithmetik und den Sinus und entwickelten die griechische und indische Trigonometrie weiter, ergänzten die griechische Geometrie und übersetzten und kommentierten die mathematischen Werke der Griechen. Die bedeutendste mathematische Leistung der Muslime ist die Begründung der heutigen Algebra.

Diese Kenntnisse gelangten über Spanien, die Kreuzzüge und den italienischen Seehandel nach Europa, dort (z. B. in Toledo → „Übersetzerschule von Toledo") wurden viele der arabischen Schriften ins Lateinische übertragen;

Frühzeit; Al-Chwarizmi (um 820 n. Chr.), Name steckt im Wort „Algorithmus" (Rechnen nach Art des Algorismi), schreibt De numero indorum in dem das indische Positionssystem beschrieben ist und Al-dschabr wa'l muqabalah (Aufgabensammlung für Kaufleute und Beamte, steckt im Wort „Algebra“); andere Mathematiker: Thabit Ibn Qurra, Al-Battani (Albategnius), Al-Habas, Abu'l Wafa

Hochblüte; um 1000 n. Chr.; Al-Karagi erweitert die Algebra; der persische Mediziner, Philosoph und Mathematiker Ibn Sina (Avicenna) betont die Bedeutung der Mathematik; Al-Biruni; Ibn al-Haitham (Alhazen);

Spätzeit; Der persische Dichter und Mathematiker Omar Khayyām „der Zeltmacher“ (um 1100) verfasst ein Lehrbuch für Algebra; Nasir Al-din al-Tusi (um 1250); Al-Kashi (um 1400);

Im Zuge der Reconquista werden die Mauren aus Europa vertrieben. Ihre Mathematik lassen sie zurück und sie beeinflusst in der Folge die europäische Mathematik grundlegend. Begriffe wie Algebra, Algorithmus sowie die arabischen Ziffern gehen darauf zurück.

In Deutschland erklärte der sprichwörtliche Adam Ries(e) seinen Landsleuten in der Landessprache das Rechnen, und die Verwendung der indischen Ziffern statt der unpraktischen römischen wurde populär.

In Frankreich entdeckte René Descartes, dass man Geometrie, die bis dahin nach Euklid gelehrt wurde, auch mit Zahlen beschreiben kann. Alles, was dazu nötig ist, sind zwei Linien, die einen rechten Winkel miteinander bilden sowie eine Länge „1“ (Normierung) und eine allgemeine Länge „a“. Dann kann man bei affinen Abbildungen, z. B. zentrischen Streckungen, alle Größen algebraisch, also wie mit Zahlen, berechnen. Das kartesische Koordinatensystem stammt in seiner heutigen Form von Leonhard Euler. Blaise Pascal fand den Zusammenhang der Binomialkoeffizienten (Pascalsches Dreieck) und definierte die Negative Binomialverteilung (Pascal-Verteilung).

Als **Gesetze der großen Zahlen** werden bestimmte mathematische Sätze aus der Stochastik bezeichnet.

In ihrer einfachsten Form besagen diese Sätze, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses in der Regel der Wahrscheinlichkeit dieses Zufallsergebnisses annähert, wenn das zu Grunde liegende Zufallsexperiment immer wieder unter denselben Voraussetzungen durchgeführt wird. Formal handelt es sich also um Konvergenzsätze für Zufallsvariable, zumeist unterteilt in „starke“ (fast sichere Konvergenz) und „schwache“ (Konvergenz in Wahrscheinlichkeit) Gesetze der großen Zahlen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze beim Werfen Kopf zeigt, betrage ½. Je häufiger die Münze geworfen wird, desto unwahrscheinlicher wird es, dass der Anteil der Würfe, bei denen Kopf erscheint (also die relative Häufigkeit des Ereignisses „Kopf“), um mehr als einen beliebigen vorgegebenen Wert von der theoretischen Wahrscheinlichkeit ½ abweicht. Dagegen ist es durchaus wahrscheinlich, dass die absolute Differenz zwischen der Anzahl der Kopf-Würfe und der halben Gesamtzahl der Würfe anwächst.

Zahlensymbolik

Bibel:

Als Ursprung und Urkeim der Buchstaben wie der Zahlen gilt der kleinste Buchstabe Jod mit dem Zahlenwert Zehn. Dieses Jod ist im Aleph (א) doppelt enthalten: als Jod oben und als unteres Jod, verbunden durch eine Waw (= 6 sowie ‚und' als Verbindung von Himmel und Erde). Das obere Jod repräsentiert den Schöpfer, das um 90° gedrehte untere Jod den am 6. Schöpfungstag (Waw) als Verbindung von Himmel und Erde geschaffenen Menschen, gespalten in 5 und 5, seine rechte, innere, männliche (‚Himmel') und seine linke, äußere, weibliche Seite (‚Erde'). Der Mensch wird als letztes Geschöpf geschaffen „in Gottes Bild, in Gottes Gleichnis, mit der ‚Eins' auch schon in sich, Mann und Frau als ein Wesen", mit dem wieder alles Geschaffene zur Einheit zurückkehren sollte: „So schuf Gott die Zehn auch unten, wie dies in den ersten zehn Schöpfungsworten der ersten Schöpfungsgeschichte zum Ausdruck kommt. Und so stand der Mensch also auch unten, mit allem um sich herum, gegenüber der Zehn oben."[3]

Die ungerade Zahl 5 hat also hier eine doppelte Bedeutung, sie kann ‚männlich' (himmlisch) oder ‚weiblich' (irdisch) sein. Mit dem Bund der Beschneidung erhalten Abram und Sarai jeweils den Buchstaben He (= 5) in ihren Namen in der Mitte und am Ende eingefügt: aus Abram wird so Abraham, aus Sarai wird Sarah (Gen 17,5.15). Ihre gemeinsame Frucht als ‚Sohn der Verheißung' ist dann Jizchak (Isaak) mit Jod (10) am Anfang des Namens. Die beiden eingefügten He entsprechen zugleich den beiden He im Gottesnamen, dem Tetragramm JHWH, in Zahlen 10-5-6-5, zu lesen als 10 = 5 ‚und' 5.

[Auch im alten China hat die 5 die zentrale Stellung unter den neun Zahl-Archetypen, so insbesondere in den ‚magischen' Zahlenquadraten.[10] Im Buddhismus verkörpert der „fünfte Buddha" eine „Synthese und Transzendenz", ein „Transzendieren Ich-bezogener Haltungen"; der Weg führt über die in den vier Elementen symbolisierte Libido, die der ‚Verwandlung' bedarf.]

Die Verbindung der beiden Schöpfungsprinzipien geschieht im Bund und nach dem [Sündenfall] im Opfer (als ‚Erhöhung', griech. ana-phora) im Tempel, beginnend mit der Beschneidung am ‚8. Tag' (als Überstieg über die 7-Tage-Schöpfung analog zum 50. Tag). „Der neue Mensch, der des achten Tages, ist schon durch sein Kommen zur ‚Einswerdung' in dieser Welt des siebten Tages von der verdunkelnden Umhüllung des Körperlichen befreit." (Friedrich Weinreb: Schöpfung im Wort. Die Struktur der Bibel in jüdischer Überlieferung, Zürich ^{2}2002) Schöpfung bedeutet biblisch ein Heraustreten aus der Einheit Gottes im ‚Zweimachen', aber auf die Einswerdung und das Einssein mit Gott hin (‚erschaffen' ist hebr. bara, 2-200-1). Die Schöpfung endet deshalb nicht nach sechs (2 x 3) Tagen, sondern führt in den 7. Tag (Sabbat), der schon die Einheit des jenseitigen ewigen 8. Tages der Auferstehung antizipiert. Die Acht ist 2^3: die Zweiheit der Welt erhöht und verklärt in der 3. Geistpotenz und so „das Ziel der Zweiheit" der Welt.[19] Der 6., 7. und 8. Tag oder Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft bilden in ihrer Einheit das Triduum Sacrum als Mitte des Kirchenjahres.

Eine zentrale Rolle spielt(e) die Zahlensymbolik auch im alten wie modernen **China**. Von besonderer Bedeutung sind etwa die 3 als Grundlage zahlreicher Triaden, die fünf, die acht, sowie schließlich die 12 als Determinante des Kalenders wie des Tierkreises. Die 4 ist die Unglückszahl, weil sie im Chinesischen ähnlich wie „sterben“ und „Tod“ klingt. Daher wird die Zahl 4 in China und Japan möglichst vermieden oder ersetzt. 8 ist durch eine Lautähnlichkeit (zu chinesisch 发 fā „gedeihen“, „Reichtum“) die Glückszahl.

Babylonische Zahlensymbolik

Für altorientalische Religionen wie z. B. in Babylon haben Zahlen eine mystische Bedeutung. Bestimmte Zahlen entsprechen dem Einfluss der Gestirne und Konstellationen

eins: Ist das Zeichen für Einheit.

zwei: Ist das Zeichen für die Zweiteilung des Weltalls, oben und unten; auch Mond und Sonne, Winter und Sommer wurden damit in Verbindung gebracht.

drei: Entspringt der Dreiteilung des Kosmos in drei Sphären der Fixsterne; ebenso Dreiteilung des irdischen Alls in Lufthimmel, Erde und Ozean. Auch die Trias Vater, Mutter, Sohn (En-Ki, Nin-Hur-Sanga, Marduk) lässt sich damit in Verbindung bringen.

vier: Die vier Weltecken, vier Weltrichtungen, vier Winde, vier Jahreszeiten, vier Phasen des Mondes usw. stehen damit in Zusammenhang.

fünf: Das mystische Pentagramm entstand durch Hinzuziehen der Venus als fünfte Dimension zu den Planeten der vier Weltecken. Die Woche von fünf Tagen, die kosmischen Türme von fünf Stufen sind zu identifizieren.

sechs: Zahl des Hadad. Sechs Doppelmonate, sechs Weltalter zuweilen wird das Sonnenrad mit sechs Strahlen dargestellt.

sieben: Zahl der Gestirne (Sonne, Mond, Planeten Merkur-Jupiter), sieben kosmische Türme mit sieben Stufen, sieben Locken des Gilgamesch, sieben Zweige des Lebensbaums, sieben Plejaden, sieben Hauptsterne am großen Himmelswagen, sieben Namen des Mars, sieben Wochentage mit Hervorhebung des 7. als Unglückstag. Sieben Tage steigt die babylonische Flut, sieben Tage fällt die Flut, sieben Sühneriten, Schlange mit sieben Köpfen oder sieben Zungen. Sieben Tore hat die Unterwelt in der Höllenfahrt der Ištar.

acht: Ist die Zahl der Ištar-Venus. Sie wird durch ein 8-strahliges Zeichen dargestellt, verdreifacht bedeutet das Zeichen „Stern“. Acht Richtungen der Windrose, acht Speichen des Glücksrades, acht Tore hat ein Bauwerk Sanheribs.

neun: Hervorgehoben in bestimmten Kalendersystemen, zerlegt in 3 x 3; multipliziert mit 3 ergibt den Tag, an dem sich Mond und Sonne die Bestimmung teilen (27).

dreizehn: Die 13 gehört zur Zwölf. Galt als Glückszahl durch (12 + 1) Götterpaare.

siebenundzwanzig: jeden 27. Tag treffen sich Mond und Sonne, um ihre Bestimmung zu teilen.

siebzig: Zahl des vollendeten Kreislaufs.

zweiundsiebzig: 72 Älteste; Sonnenrechnung (5 x 72 = 360).

Die 13 als Unglücks- und Verschwörungszahl

Dreizehn gilt in vielen Kulturen als Unglückszahl. Die irrationale Furcht vor der Zahl 13 wird Triskaidekaphobie genannt. Menschen mit dieser Phobie meiden Räume, Stockwerke oder allgemein die Zahl 13. Diese weit verbreitete Phobie bzw. dieser Aberglaube geht so weit, dass in Gebäuden oftmals der 13. Stock „fehlt“ oder nicht ausgeschildert wird. In Flugzeugsitzen wird des Öfteren die 13. Reihe in der Nummerierung ausgelassen. Auch in Krankenhäusern und Hotels wird auf ein Zimmer Nr. 13 verzichtet, in vielen Motorsportserien auf die Startnummer 13.

Die Zahl 13 war zwar die allererste gezogene Zahl bei den deutschen Lotto-Ziehungen „6 aus 49“, ist seitdem aber die mit Abstand am seltensten gezogene Zahl.

Der dreizehnte Tag eines Monats gilt in westlicher Tradition als Unglückstag, besonders wenn er auf einen Freitag fällt, siehe Freitag der 13.

Die Zahl 13 gilt als Verschwörungs-Zahl auf dem 1-Dollar-Schein. Die Zahl 13 kommt auf dem Dollar-Schein 11 mal vor, versteckt in Bildern und Texten. Die USA haben jedoch 13 Gründerstaaten.

„Der Dreizehnte“ ist ein Synonym für den Teufel. 13 werden auch als Teufelsdutzend bezeichnet.

Literatur

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren - Novalis

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren

sind Schlüssel aller Kreaturen,

wenn die, so singen oder küssen,

mehr als die Tiefgelehrten wissen,

wenn sich die Welt ins freie Leben

und in die Welt wird zurückbegeben,

wenn dann sich wieder Licht und Schatten

zu echter Klarheit werden gatten

und man in Märchen und Gedichten

erkennt die wahren Weltgeschichten,

dann fliegt vor Einem geheimen Wort

das ganze verkehrte Wesen fort.

Unter einem Apfelbaum

Ein rosenfarbner Frühlingsschaum

gelegt in knorrig schwarze Äste.

Sieh jene Blüte dort

an jenem Zweig:

sie birgt in sich

den ganzen Blütenhimmel,

und dieser, ohne sie,

bleibt ganz sich gleich

Das Kugelparadoxon

Das Kugelparadoxon von Stefan Banach und Alfred Tarski (1924) gehort zu den erstaunlichsten Resultaten der Mathematik: Eine Kugel vom Radius r lässt sich so in endlich viele Teile zerlegen, dass man aus diesen Teilen zwei volle Kugeln vom gleichen Radius r zusammensetzen kann. Nach Raphael Robinson (1947) gibt es paradoxe Zerlegungen dieser Art, die aus nur fünf Teilen bestehen.

Der Beweis des Kugelparadoxons gibt keinen Hinweis darauf, wie die Teile aussehen konnten. Er ist, wie man sagt, ein reiner Existenzbeweis. Seine Eigenart hat ihren Grund darin, dass er wesentlich das Auswahlaxiom benutzt, ein Axiom, das wegen seiner Abstraktheit in der Mathematik lange umstritten war. Da sich Volumina von Teilen beim Zusammensetzen addieren, müssen einige Teile einer paradoxen Zerlegung der Kugel so "zerfasert" sein, dass sie kein Volumen haben. Selbst wenn sie aus Gold bestünden, hatten sie kein Gewicht. Träume, durch paradoxe Zerlegungen einer Goldkugel reich zu werden, lassen sich nicht erfüllen.

Das Kugelparadoxon besitzt eine gleichermaßen erstaunliche Verallgemeinerung: Es seien K und K0 Punktmengen des dreidimensionalen Raumes, die eine endliche Ausdehnung haben und eine — wenn auch noch so kleine — Kugel umfassen; z. B. sei K ein Körper von der Gestalt einer Rosenknospe oder eines Spinnennetzes und K0 ein Körper von der Gestalt des Freiburger Munsters oder gar der gesamten Milchstraße. Dann lässt sich K in endlich viele Teile zerlegen, aus denen man K0 zusammensetzen kann.

aus: Heinz-Dieter Ebbinghaus, Zahlen und Zeilen oder das blaue Pferd, Mathematik und Lyrik im Gespräch, Norderstedt 2010